6180
II S 6

IX

LIOTECA
MUNALE
ALA
BT
h
91

IOANNIS FRANCISCI MALFATTI

DE NATURA RADICUM

In Æquationibus Quarti Gradus

AD

CLARISSIMUM VIRUM P.

VINCENTIUM RICCATUM

SOC. JESU

EPISTOLA.

FERRARIÆ MDCCLVIII.

Apud Josephum Barberium. *Superiorum Permissu*.

BIBLIOTECA CITTADINA ALA

VINCENTIO RICCATO S. J.

JOANNES FRANCISCUS MALFATTUS

S. P. D.

Cum superioribus mensibus clarissimæ fœminæ Cajetanæ Mariæ Agnesiæ Institutiones Analyticas relegens in eum primi Voluminis locum devenerim, ubi agitur de æquationibus tertii, et quarti gradus, dolui maxime, illam integra pertractatione naturam omnium radicum possibilium in æquàtione catholica tertii gradus complexam, nullam supposuisse methodum generalem, qua natura radicum in formulis quarti vel leviter intuenti detegeretur. Non me latet, ad Cardanicam exprimendi rationem redigi posse istiusmodi radices universas, immo et intersectione curvarum omnes construi, cujuscumque gradus sint, æquationes. Sed quum ex hisce regulis, illa tantum in arithmeticis quæstionibus usuvenire queat, hæc ad geometricas ita accommodari, ut quandoque ad dignoscendum, an, aut qua parte, habita ratione ad initium abscissarum, intersectio curvarum fiat, et summa acies, et perfectissima earundem descriptio requiratur, ineptas aliquando ambas ad veram radicum naturam inspectantibus Analystarum oculis manifestandam semper duxi, de tutiori methodo sollicitus, quare id consequamur. Ac mihi rem ipsam attento animo perpendenti forte fax quædam illuxit ex ipsis id genus æquationum constructionibus orta, quæ per idoneam sectionum conicarum descriptionem peraguntur, dum in casu mutui inter curvas contactus constitissem. Cumque omnia sub initium meditationis bene cesserint, in spem erectus ad perficiendum Problema totus incubui, eoque potitus, solutionem, informem quidem, et indigestam festina scriptione exaratam, ad te, Vir Clarissime, et inter Geometras Illustrissime, mittere properavi, ut, si forte aliquid in illa humani passus essem, per te ea, quæ tui moris est, ingenuitate commonefactus, aut emendarem, aut in emendationis desperationem conjectus totam rem abjicerem, aliisque tentandam relinquerem. A te vero de adepta veritate certior factus, non mediocri gaudio perfusus sum, cum intellexerim, tibi, qui mihi multorum instar es, id approbatum, quod minimi fortasse momenti pu-

tabam, meque maxime commovit humaniſſima tua de felici, in re, ut tu ipſe ſentis, difficili, exitu, ac de non ineleganti methodo, gratulatio. Quoniam vero cenſes, ea, quæcumque ſint, ſua utilitate non carere, facilè inductus fui, ut typis mandarem, adhortantibus amicis, et Nobiliſſimo præſertim viro MARCHIONE CHRISTINO BEVILAQUA, qui me ad familiaritatem ſuam, et contubernium benigniſſime accitum ſemper fovit, et *nobis hæc otia fecit*. Nec cui Problema peculiariter nuncuparem vel tantillum dubitavi: Tibi ſiquidem deberi ſtudiorum meorum primitias quis non videt, quas alteri inconſultius oblatas jure ac merito aſſerere potuiſſes, qui me per ſeptennium ad Geometriam conformaſti, atque, ut in Mathematicis diſciplinis, prima, penè dicam, ſtipendia facerem, te ducem præſtitiſti? Munuſculum itaque hoc, quantulumcumque eſt, æquo animo accipias velim, majora certè daturus, ſi vires ſuppeterent, nec ingenii mei anguſtia amplitudinem animi coarctaret. Beneficiorum in me uberius collatorum recordatio facit, hoc ut optem: obſervantiæ meæ perpetuum teſtimonium, ut ſperem: humanitas, et comitas tua, ut jam videar eſſe conſecutus. Sed jam ad rem ipſam progrediamur.

Nemo non novit Analyſeos gnarus, formulas quarti gradus conflari ex quatuor radicibus, quarum ſingulæ aut binæ ſint imaginariæ, vel reales, poſitivæ, ſeu negativæ. Quando autem in formulis unuſquiſque ex hiſce caſibus locum obtineat, plerumque incertum eſt, ne deſcriptione quidem curvarum demonſtrante, propter ancipitem, nec bene firmam mutuæ interſectionis cognitionem Operæ prætium itaque judicavi in æquatione œcumenica quarti gradus invenire rationem, quam debent habere inter ſe coefficientes quantitates terminorum, vel numericæ, vel ſpecioſæ, ut cito natura, et poſitio radicum appareat, ac de poſſibilitate, ſive impoſſibilitate Problematis, unde orta eſt æquatio, tutius decernatur.

Hoc vero ut præſtem, ſumo æquationem catholicam quarti gradus $x^{4} \ast + P x^{2} + Q x + R = 0$, cui deeſt ſecundus terminus, quod non officit, ut pote qui ſemper ex æquationibus per ſimplicem ſubſtitutionem demi poſſit. Quum autem quantitates indeterminatæ P, Q, R eſſe poſſint poſitivæ, aut negativæ, ſingulæ nobis ſignorum combinationes erunt examinandæ, ut rectam pro quocumque caſu ipſarum P, Q, R inter ſe comparationem conſtituamus.

Sunto primo P, Q, R ſingulæ poſitivæ, et induat æquatio hanc formam pariter univerſalem; $x^{4} \ast + 6 p x^{2} + 4 q x + r = 0$, ubi adnotandum velim, coefficientes numericos ideò tantùm præfixos, ut prodeant ſimpliciores formulæ mox inventuræ. Ut hujuſce æqua-

tionis conſtructio perficiatur, ponatur $x^2 + 3p = my$. (m eſt quantitas quæcumque conſtans ad arbitrium ſumpta). Elevando ad quadratum, fiet $x^4 + 6px^2 = m^2y^2 - 9p^2$; et facta ſubſtitutione in æquatione propoſita, habebitur $m^2y^2 - 9p^2 + 4qx + r = o$, quæ diviſa per m^2, atque opportunè diſpoſita, convertitur in ſequentem $y^2 = \frac{4q}{m^2} \cdot \overline{\frac{9p^2 - r}{4q} - x}$. Supradictæ æquationis $x^2 + 3p = my$ formæ hac æquivalente ſurrogata

$x^2 = m \cdot \overline{y - \frac{3p}{m}}$, et poſitis $\frac{9p^2 - r}{4q} - x = z$; $y - \frac{3p}{m} = u$, ſubſtituтiſque valoribus, oriuntur denique duæ æquationes ad parabolam Apollonianam: $y^2 = \frac{4q}{m^2} \cdot z$; $x^2 = mu$, quibus formula propoſita conſtruitur.

In expreſſione $\frac{9p^2 - r}{4q}$ fieri poteſt, ut ſit $9p^2 > r$, ſive $9p^2 < r$, (æqualitatis caſus, quia nihil immutans, ommittitur). Fingamus primò $9p^2 > r$. In figura 1, in qua abſciſſæ x poſitivæ ſumuntur a B plagam b, negativæ plagam P verſus, ſit ACM parabola æquationis $y^2 = \frac{4q}{m^2} \cdot z$. Intercepta $AB = \frac{9p^2 - r}{4q}$, abſciſſis x poſitivis reſpondebunt ordinatæ reales a B uſque ad A, ultra quod punctum fient imaginariæ: abſciſſis autem negativis etiam ad infinitum extenſis ſemper inſiſtent ordinatæ reales, et continuè creſcentes ſine termino. Supra punctum B erigatur perpendicularis $BV = \frac{3p}{m}$, quæ erit major ordinata ad curvam BC; introducto ſiquidem in æquatio-

nem

nem $y^2 = \frac{4q}{m^2} \cdot z$ valore ipsius $AB = \frac{9p^2 - r}{4q}$, eruitur $y = BC = \frac{\sqrt{9p^2 - r}}{m}$, quæ eſt quantitas minor, quam $\frac{3p}{m} = BV$. Acta itaque VH parallela axi AB, ſi vertice V, parametro m, et tangente VH deſcribatur parabola, erit hæc curva ex æquatione $x^2 = mu$, quæ vel ſecabit alteram parabolam in punctis quibuſcumque n, n, vel tanget in unico puncto M abſciſſas negativas verſus, vel tota cadet extrinſecus, ut ſatis patet. In primo caſu æquatio duas radices complectitur reales, inæquales, et negativas; in ſecundo caſu duæ radices inæquales evadunt æquales, remanentibus in utroque reliquis duabus imaginariis; demùm in tertio caſu, cum neque interſectio, neque contactus habeatur, omnes quatuor radices erunt imaginariæ.

Simili modo, ſi fuerit $9p^2 < r$, ſecta $Ab = -\frac{r + 9p^2}{4q}$, atque excitata perpendiculari $bu = \frac{3p}{m}$, et vertice u, tangente uh parallela axi AB, et parametro m delineata parabola um erit curva æquationis $x^2 = mu$, cujus aut cum curva ACM interſectio *ex - gr* - in punctis f, f, aut contactus unicus in puncto m, aut præterlapſus, determinat radices æquationis, ut ſuperius factum eſt: atque ex hac generali conſtructione æquationis $x^4 * + 6px^2 + 4qx + r = o$ evidentiſſime colligitur, non poſſe illam, niſi, ſive ex duabus radicibus realibus, et negativis, ac duabus imaginariis, ſive ex omnibus imaginariis coagmentari.

In altera ſignorum combinatione $x^4 * + 6px^2 - 4qx + r = o$, ſubſtitutiones faciendæ ſunt; $\frac{r - 9p^2}{4q} - x = z$; $y - \frac{3p}{m} = u$, atque æquationes finales $x^2 = mu$; $y^2 = -\frac{4q \cdot z}{m^2}$, ex quo intelligitur, parabolam AM converti debere ad partes abſciſſarum poſitivas, ſicut

ſicut in figura 2. proindeque parabolarum VM, um pro diverſa hypotheſi $r < 9p^2$, ſive $r > 9p^2$ deſcribendarum interſectio, contactuſve accidit in punctis abſciſſas poſitivas ſpectantibus, ita ut in æquatione $x^4 * + 6px^2 - 4qx + r = o$ non inſint niſi aut binæ radices reales poſitivæ, et binæ imaginariæ aut omnes imaginariæ. Quod itidem ex ipſa æquationis inſpectione facile dignoſcitur, quæ tantum differt a præcedente ſigno termini, in quo incognita x imparem obtinet dimenſionem; atque hoc ipſum nobis indicio eſt, omnia, quæ ſuperius adnotavimus, hic locum habere, excepta radicum a negativa ad poſitivam plagam converſione.

Pro ſignorum tertio ordine $x^4 * + 6px^2 + 4qx - r = o$ duplex ſubſtitutio fit; $\frac{9p^2 + r}{4q} - x = z$; $y - \frac{3p}{m} = u$. Deſignata porrò juxta morem (figura 3) parabola AMm, atque intercepta $AB = \frac{9p^2 + r}{4q}$, lineæ BP verſus A erunt abſciſſæ poſitivæ originem habentes in puncto B. In æquatione $y^2 = \frac{4q}{m^2} \cdot z$ ſi ponatur $z = AB = \frac{9p^2 + r}{4q}$, fiet $y = BC = \frac{\sqrt{9p^2 + r}}{m} > \frac{3p}{m}$. Ergo punctum V alterius parabolæ vertex, quod erecta $BV = \frac{3p}{m}$ determinatur, cadit intra aream curvæ AMm adeo, ut ſi vertice V, tangente VH parallela axi AB, et parametro m deſcribatur parabola æquationis $x^2 = mu$, hæc in quacumque hypotheſi ſecabit curvam AMm ſiniſtrorſum et dextrorſum, ſolummodo in duobus punctis M, m, excluſo contactus caſu, indèque nobis compertum eſt de perpetua realitate duarum radicum in æquatione $x^4 * + 6px^2 + 4qx - r = o$, quarum altera ſit poſitiva, altera negativa, nec non de impoſſibilitate reliquarum.

Cum inter quartam ſignorum diſpoſitionem $x^4 * + 6px^2 - 4qx - r = o$, et antecedentem nihil interſit præter varietatem ſigni in termino poteſtatis imparis ipſius x, certum eſt, hic de priori conſtructione non immu-

immutari, nisi parabolæ *AM* positionem, ita ut quæ radix ibi erat positiva, hic fiat negativa, et vice versa, ac si in illa major negativa, in hac minor (figura 4)

Quid vero, si hactenus positivus tertius in ordine terminus negativus evadat, ut sit æquatio $x^4 * - 6px^2 + 4qx + r = o$? Factis substitutionibus $y + \frac{3p}{m} = u$; $\frac{9p^2 - r}{4q} - x = z$, vel quadratum dimidii coefficientis tertii termini majus est ultimo constanti, vel minus; scilicet (quod eodem recidit) $9p^2 >$, aut $< r$. Si majus, in axe parabolæ (Figura 5) *AM* de more descriptæ capiatur $AB = \frac{9p^2 - r}{4q}$, eique orthogonalis inferius demittatur $BV = \frac{3p}{m}$, erit punctum *V* vertex alterius parabolæ *VM* parametro *m*, et ad axem *VB* delineatæ, quæ, quoniam punctum *V* extra aream curvæ *AM* cadit, abscissæ $AB = \frac{9p^2 - r}{4q}$ respondente ordinata. $BC = \sqrt{\frac{9p^2 - r}{m}} < \frac{3p}{m}$, bis intersecabit parabolam *AM* ad partes negativas in punctis *m*, *m*, sic ut de duplici reali, et negativa radice in æquatione existente ambigere nemo possit, incertus tamen de realitate, æqualitate, aut impossibilitate ad partes positivas reliquarum, ab intersectione in punctis *n*, *n* contactuve in unico puncto *M*, sive mutua curvarum evitatione determinandis.

Sin minus, $AB = \frac{9p^2 - r}{4q}$ fit quantitas negativa, quæ ideo in plaga opposita intercipi debet, ut sit $Ab = - \frac{r + 9p^2}{4q}$: atque ad verticem alterius parabolæ circumscribendum demissa *bu* perpendiculari, et $= \frac{3p}{m}$, liquet parabolam *um* ex æquatione $x^2 = mu$, sive bina intersectione, sive contactu alteri curvæ *AM* non posse occurrere, nisi in regione negativa, ita ut et quandoque tota præterlabatur. In primo, et secundo casu integræ nobis sunt duæ radices reales, et negativæ, remanentibus imaginariis cæteris positivis; in tertio casu totum fit imaginarium.

Eodem

Eodem ratiocinio utare in ſexta ſignorum combinatione $x^4 * - 6px^2 - 4qx + r = o$ in hoc tantum a prædicta diſcrepante, quod quæ ibi dicta ſunt de radicibus negativis, hic de poſitivis ſtatui debeant, et e contrario (figura 6).

Pro ſeptimo ſignorum ordine hanc mihi æquationem propono conſtruendam $x^4 * - 6px^2 + 4qx - r = o$, in qua præter tertium terminum quantitas quoque r ſit negativa. Subſtituatur u pro $y + \frac{3p}{m}$, et z pro $\frac{9p^2 + r}{4q} - x$, ac in axe parabolæ AM ſumpta $AB = \frac{9p^2 + r}{4q}$, recta $BV = \frac{3p}{m}$ ordinatæ in B adjicienda, ut habeatur vertex alterius parabolæ, minor eſt ipſa ordinata BC. Quapropter parabola Vm ex æquatione $x^2 = mu$ citra curvam AM initiùm habebit, eamque ſecabit ſemper in punctis m, m, altero negativas, poſitivas altero abſciſſas ſpectante, nec dubia erit realitas duarum radicum, quarum altera poſitiva ſit, altera negativa. Fieri autem poteſt, ut ramus Vm intercipiat portionem nn rami AC duplici ſectione perfunctus in punctis n, n, ſive ut ad oſculum in puncto M tantum accedat, aut etiam totus internè progrediatur: prima, et ſecunda hypotheſis nobis exhibet quatuor radices reales, quarum tres ſint poſitivæ, reliqua negativa; tertia vero duas ex poſitivis in imaginarias commutat.

Noviſſima denique ſignorum collocatiò in æquatione $x^4 * - 6px^2 - 4qx - r = o$ nihil non requirit eorum, quæ in antecedenti conſtructione fecimus, præter poſitionem parabolæ AM, quæ (figura 8) hic converti debet, ut anceps caſus cis labentis, ſecantis, vel contingentis rami VM ad partes abſciſſarum negativas habeatur. Atque inde conſtructam eſſe æquationem generalem $x^4 * + Px^2 + Qx + R = o$ in omni poſſibili ſignorum combinatione liquido conſtabit; quæ omnia idcirco diligentius perſecutus ſum, ut ea clariora evadant, quæ ad problematis enodationem ipſiſmet conſtructionibus innixa inferius ſubjungemus.

Tòtum in re perficienda adjumentum ex ipſo inter duas parabolas contactu profluxit, ſuper quo ſic ratiocinium inſtituo. In omnibus hiſce caſibus, ſi tertium et quartum excipias, in quibus parabolarum contactus fit impoſſibilis, certa, ac determinata indeterminatarum p, q, r

inter ſe ratione opus eſt, ut parabolæ ad contactum veniant, qua ſublata, ſive interſectio, ſive reciproca curvarum evitatio ſuccedat. Ponamus, quod in caſu contactus debeat eſſe $r = N$, quæ quantitas eſt certa functio ipſarum p, et q, cui æquari debet r, ut curvæ æquationem conſtruentes ſe tangant; atque imaginata in hac hypotheſi figurarum deſcriptione, videamus, quamnam mutationem inducat diminutio, aut incrementum vel minimum ipſius r infra, aut ſupra valorem N. Quoniam quantitas r neque parabolarum parametris, neque diſtantiis (figura 1.) BV, bu verticis parabolæ VM, aut um ab axe alterius immixta, in expreſſionem ſolummodo rectæ AB, vel Ab ingreditur, certum eſt, auctam, ſive imminutam quantitatem r non immutaturam niſi rectam AB, vel Ab, adeo ut intactis reliquis nihil inde ſequatur præter parabolæ, VM, aut um parallelo motu actæ translationem. Si itaque eſt $r > N$, ita ut $9p^2$ ſit $> r$, eadem remanente diſtantia verticali VB, minor fit diſtantia horizontalis verticis parabolæ VM a vertice alterius AM ipſa AB, quæ eſt eadem diſtantia honzontalis in caſu contactus parabolarum. Ut igitur conſtruatur æquatio quarti gradus, in qua eſt $r > N$, recedere debet parabola VM a contactu alterius parabolæ ac tota exterius progredi, ut nullibi contactus, et multo minus interſectio curvarum eveniat. Idem prorſus contingere debet, ſi eſt $r > N$ ita ut ſit $9p^2 < r$. In eo enim caſu diſtantia horizontalis inter vertices parabolarum major fit recta Ab, et parabola um in eadem altitudine ub, quantum opus eſt, a vertice A amovenda, a contactu alterius curvæ deflectit, ac tota præterlabitur. In hypotheſi vero $r < N$, contraria fieri debet translatio parabolæ VM aut um; nam diſtantia horizontalis inter vertices curvarum evadit major recta AB, ſi $9p^2 > r$, minor recta Ab, ſi $9p^2 < r$, proindeque aliqua areæ unius parabolæ portione in alterius aream illata, pro contactu neceſſe eſſe interſectionem oriri, quiſque videt.

Quæ de formula quarti gradus in prima ſignorum combinatione dicta ſunt, ad eandem in cæteris accommodari poſſunt, tertia vero, et quarta exceptis, in quibus quicumque valor tribuatur quantitati r, nonniſi duplex interſcctio gignitur in punctis M, m, quorum prius in poſitiva abſciſſarum plaga, alterum in negativa ſit locatum.

Cæteroquin in figura 5, facto $r > N$, decrescit distantia horizontalis inte vertices curvarum A, V, et fit minor ipsa AB, si $9p^2 > r$, augetur eadem distantia inter vertices A, u, et fit major ipsa Ab, si $9p^2 < r$. Porro posito $r < N$, juxta diversas hypotheses $9p^2 >$, aut $< r$ prædicta distantia horizontalis major evadit recta AB, sive minor recta bA; atque in hoc casu ramus VM, aut um citra punctum contactus M, aut m progrediens intersectiones in punctis n, n, sive f, f, producit, in illo totus extralabitur, ac duarum radicum realium in imaginarias transformationem commonstrat.

Tandem in figura 7. excepimus AB pro casu contactus $= \frac{9p^2 + r}{4q} = \frac{9p^2 + N}{4q}$ ex substitutione $r = N$, quo valore N, si r inveniatur majus, quantitas $\frac{9p^2 + r}{4q}$, videlicet distantia horizontalis inter vertices curvarum longius porrigitur ipsa AB, adeo ut ramus VMm alteri AMC contactu tenus accedere nequeat. Si autem $r < N$, propter supradictæ distantiæ horizontalis imminutionem, ad duplicem ultra contactum in punctis ex. gr. n, n intersectionem deveniet.

Ex hactenus adnotatis colligere certo licet sumpta quacumque præter tertiam et quartam signorum collocatione, et posito quod r debeat esse $= N$, ut habeatur parabolarum contactus, si invenitur $r < N$, a contactu ad intersectionem fit transitus ita, ut quæ duæ radices in casu se mutuo contingentium parabolarum æquales erant, inæquales evadant; imaginariæ vero, sive impossibiles, quando est $r > N$; quæ subinde quantitas indeterminata circumscribenda est ad canones pro singulis signorum combinationibus efformandos.

Quum in æquatione canonica quarti gradus $x^4 * + 6px^2 + 4qx + r = 0$ insunt duæ radices æquales, certissimum est apud Mathematicos Theorema, sumpta quacumque serie arithmetica, ac primo seriei

termino in primum æquationis, proximoque feriei in proximum æquationis terminum ducto, et sic deinceps, consurgentem ex hac multiplicatione æquationem unam quoque ex illis æqualibus radicibus continere, verissimamque esse ac illa unde profluit. Adhibita itaque serie arithmetica 4, 3, 2, 1, 0, institutaque juxta præscriptam regulam multiplicatione, orietur æquatio $4x^4 + 12px^2 + 4qx = 0$, nempe divisis per 4, et ad alteram partem translatis postremis duobus terminis, $x^4 = -3px^2 - qx$, qui valor in superiori formula substitutus exhibebit æquationem secundi gradus $3px^2 + 3qx + r = 0$, unde eruitur $x = -\frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{3p}}$. Insuper æquatio $4x^4 + 12px^2 + 4qx = 0$ per $4x$ dividatur, et fiet hæc altera, $x^3 + 3px + q = 0$, in quam pro x immisso valore $-\frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{3p}}$, irrationalibusque quantitatibus se se in illam immiscentibus eliminatis, exurget demum quęsita quantitatum p, q, r inter se collatio hac æquatione comprehensa: $r^3 - 18p^2r^2 + \overline{54pq^2 + 81p^4} \cdot r - 27q^4 - 54p^3q^2 = 0$.

Hæc ex substitutione $r = 3t + 6p^2$ transformabitur in sequentem $t^3 + \overline{6pq^2 - 3p^4} \cdot t + 2p^6 + 10p^3q^2 - q^4 = 0$; eaque Cardani methodo resoluta recipit hanc formam $t = \sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$, ubi A, et B non sunt nisi functiones ipsarum p, q

Quotiescumque igitur erit $t = \sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$, sive, quod perinde est, $r = 6p^2 + 3\sqrt[3]{A} \pm 3\sqrt[3]{B}$, inerunt in æquatione duæ radices æquales, videlicet curvæ eam construentes ad contactum

mutuum

mutuum accedent: En itaque *N* nova hac indutum forma $6p^2 + 3\sqrt[3]{A} \pm 3\sqrt[3]{B}$: atque iccirco, si

$r = 6p^2 + 3\sqrt[3]{A} \pm 3\sqrt[3]{B}$, vel

$r - 6p^2 - 3\sqrt[3]{A} \mp 3\sqrt[3]{B} = o$, ſtatuendum eſt de æqualitate duarum radicum realium;

ſi $r - 6p^2 - 3\sqrt[3]{A} \mp 3\sqrt[3]{B} < o$, duæ radices æquales fiunt inæquales;

ſi $r - 6p^2 - 3\sqrt[3]{A} \mp 3\sqrt[3]{B} > o$, eędem fiunt imaginariæ.

Hoc poſito, ſi in eandem quamcumque quantitatem ambo membra harum comparationum ducantur, orta producta dignoſcendis itidem radicibus inſervire poſſe conſtat. Sit quantitas multiplicatrix ea ipſa, quam acutiſſimus, atque Analyſeos peritiſſimus Gabriel Manfredius in Commentariis Bononienſibus formulæ reciprocam vocat, quæque in $r - 6p^2 - 3\sqrt[3]{A} \mp 3\sqrt[3]{B}$ ducta exhibeat productum irrationalibus liberatum. Extra dubium eſt, per hanc reſtitui ſuperiorem ipſam formulam $r^3 - 18p^2r^2 + 54pq^2 + 81p^4 . r - 27q^4 - 54p^3q^2$

ſive alteram $t^3 + 6pq^2 - 3p^4 . t + 2p^6 + 10p^3q^2 - q^4$

ex ſubſtitutione $3t + 6p^2 = r$. Porro homogeneum comparationis, ut pote nihilo æquale, etiam poſt præceptam multiplicationem erit $= o$; ideoque oportet ut ſit in caſu duarum æqualium radicum

$t^3 + 6pq^2 - 3p^4 . t + 2p^6 + 10p^3q^2 - q^4 = o$;

in caſu earundem inæqualium

$t^3 + 6pq^2 - 3p^4 . t + 2p^6 + 10p^3q^2 - q^4 < o$;

in caſu imaginario

$t^3 + 6pq^2 - 3p^4 . t + 2p^6 + 10p^3q^2 - q^4 > o$.

Hæc formula ſecundum literam q ordinata ex cenſu eſt quadraticarum affectarum, cujus reſolutione conflantur canones ad ſpeciem q

Pro contactu $q^2 = 5p^3 + 3pt + \overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}}$

Pro interſectione $q^2 > 5p^3 + 3pt + \overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}}$

Pro caſu imaginario $q^2 < 5p^3 + 3pt + \overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}}$

De duobus ſignis $\pm$ poteſtati $\overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}}$ ſuperius conſulto delegi, ne q ſit quantitas imaginaria; quod revera accideret, ſi ſignum $-$ præpoſuiſſem, cum fuerit jugiter

$5p^3 + 3pt < \overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}}$. Sit enim, ſi fieri poteſt,

$\overline{t + 3p^2}^{\frac{3}{2}} < 5p^3 + 3pt$. Elevatis ad quadratum membris, erit

$\overline{t + 3p^2}^{3} < 25p^6 + 30p^4 t + 9p^2 t^2$, hoc eſt

$t^3 + 9p^2 t^2 + 27p^4 t + 27p^6 < 25p^6 + 30p^4 t + 9p^2 t^2$;

deletiſque delendis, $t^3 - 3p^4 t + 2p^6 < 0$, nempe

$\overline{t + 2p^2} \cdot \overline{t - p^2}^{2} < 0$; quod eſt abſurdum, cum nequeat

quantitas poſitiva $t + 2p^2$ in alteram poſitivam $\overline{t - p^2}^{2}$ ducta productum conficere < 0.

En ergo veros canones, pro *t* ejus valore per *r* suffecto.

Pro duabus radicibus æqualibus; $q^2 = pr - p^3 + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$;

Pro iisdem inæqualibus; $q^2 > pr - p^3 + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$;

Pro casu imaginario; $q^2 < pr - p^3 + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$;

Qui in hypothesi primæ signorum combinationis inventi cæteris quoque conveniunt. Ex. gr. in æquatione $x^4 * + 6px^2 + 4qx - r = o$, ob r negativum contrario signo afficiendi sunt termini specie r involuti ita, ut pro duabus radicibus æqualibus sit æquatio $q^2 = - pr - p^3 + \overline{p^2 - \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$. Hic vero advertas velim, quantitatem p fieri imaginariam propter $pr + p^3 > \overline{p^2 - \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$: quod ipsum nos admonet de duplicis radicis æqualis, sive parabolarum contactus impossibilitate, quemadmodum ex ipsa constructione (figura 3, 4) collegimus.

Reliquum est ut subijciam pro quocumque signorum ordine radicum determinationes, ne cui negotium facessat, an ad reale, vel imaginarium genus cujuscumque æquationis quarti gradus radices pertineant, internoscere.

Prima æquatio $x^4 * + 6px^2 + 4qx + r = o$ conficitur ex

$q^2 = pr - p^3 + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$. 2 rad. neg. real. æqu., et 2 imag. positivis.

Quando $q^2 > pr - p^3 + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\,\frac{3}{2}}$. 2. rad. negat. real. inæqual. et 2. imag. posit.

$q^2 < pr - p^3 + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 4 rad. imag., quarum 2. posit, reliquæ negat.

Tertia Æquatio $x^4 * + 6px^2 + 4qx - r = 0$ semper habet duas radices reales, quarum una posit., altera negat., et reliquæ imaginariæ.

In quinta æquatione $x^4 * - 6px^2 + 4qx + r = 0$ duo casus distinguendi: vel quadratum dimidii coefficientis tertii termini majus est postremo, vel non, nimirum $9p^2 >$, aut $< r$;

Si $9p^2 > r$, æquatio continet

$q^2 = p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real. posit. æqu. et 2 real. neg. inæqu.

Quando $q^2 > p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real. posit. inęqu., et 2 real. neg. inæqu.

$q^2 < p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real. neg. inęqu., et 2 rad. posit. imag.

Si $9p^2 < r$

$q^2 = p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real. neg. æqu., et 2 imag. posit.

Quando $q^2 > p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real. neg. inæqu., et 2 imag. posit.

$q^2 < p^3 - pr + \left(p^2 + \frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 4 rad. imag., quarum 2 posit., et 2 negat.

Denique

Denique 7 æquatio $x^4 * - 6px^2 + 4qx - r = o$ coalescit ex

$q^2 = pr + p^3 + \overline{p^2 - \frac{r}{3}}^{\frac{3}{2}}$ 3 rad. posit. real, quarum 2 sunt equ., et 1 real. negat.

Quando $q^2 > pr + p^3 + \overline{p^2 - \frac{r}{3}}^{\frac{3}{2}}$ 3 rad. real. posit inæqual, et 1 real. negat.

$q^2 < pr + p^3 + \overline{p^2 - \frac{r}{3}}^{\frac{3}{2}}$ 2 rad. real., quarum una posit. altera negat., et 2. imag. pos.

Canones pro combinatione signorum ratione tertii termini $4qx$ libenter omisi, cum iidem prorsus sint ac antecedentes, in denominatione radicum ratiocinio tantum converso, ut hic de radicibus negativis, quod inibi de positivis, asseratur, et e contrario. Atque inde post institutam terminorum comparationem difficultas sublata est cognoscendi, quot radices reales, vel imaginarias, positivas, seu negativas quæcumque quarti gradus æquatio proposita complectatur. Rem per se claram unico tantummodo exemplo clariorem reddam, quod pro opusculi coronide hic subjiciam.

Sit æquatio quarti gradus $x^4 - 6a^2x^2 + 8a^3x + 27a^4 = o$, cujus radicum efficentium naturam detegere aggredimur. Hac cum quinta ex canonicis $x^4 * - 6px^2 + 4qx + r = o$ collata, invenietur $p = a^2$; $r = 27a^4$, $p^3 - pr + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\frac{3}{2}} = a^6 \cdot \overline{10\sqrt{10} - 26}$, et $q^2 = 4a^6$; quæ postrema quantitas cum minor sit $a^6 \cdot \overline{10\sqrt{10} - 26}$,

ob quadratum dimidii coefficientis tertii termini $9a^4$ minus ultimo $27a^4$, excipiendæ sunt determinationes positæ in hypothesibus $9p^2 < r$; $q^2 < p^3 - pr + \overline{p^2 + \frac{r}{3}}^{\frac{3}{2}}$, ex quibus colligitur; æquationem x^4

$-6a$

$-6a^2x^2 + 8a^3x + 27a^4 = 0$ ex quatuor radicibus imaginaris coaleſcere, quarum duæ poſitivæ ſint, reliquæ negativæ, ac proinde Problema, unde ipſa defluxit, inter impoſſibilia reponendum.

Atque hæc ſunt, Vir Clariſſime, quæ mihi altum Agneſiæ ſuper hac re ſilentium querenti caſus et meditatio obtulerunt. Si quid in hiſce Geometrię cultores, quod ipſis fortaſſe arridere poſſit, compererint, navatæ operæ non pœnitebit; comperturos autem confido, dum honorificum tuum de hac lucubratiuncula per privatas literas teſtimonium reminiſcor. Vale, vir præſtantiſſime, teque univerſæ Matheſeos incremento diutiſſime incolumem ſerva.

Dabam Ferrariæ Pridie Kalendas Aprilis a. 1758.

Fig. 1.

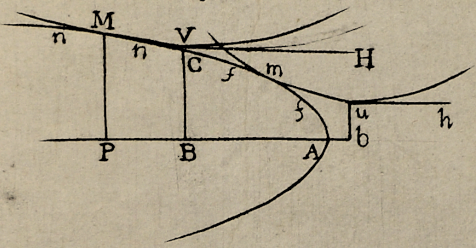

Fig. 2.

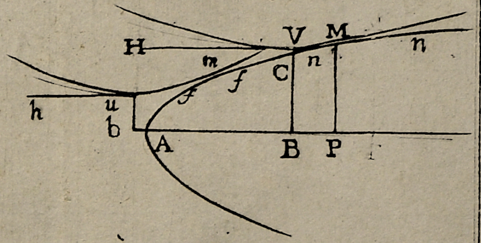

Fig. 3.

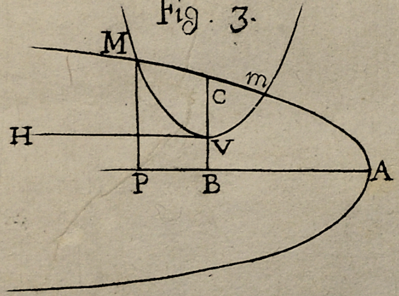

Fig. 4.

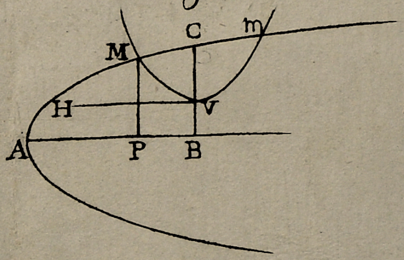

Fig. 5.

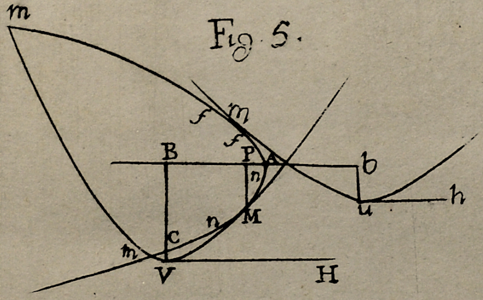

Fig. 6.

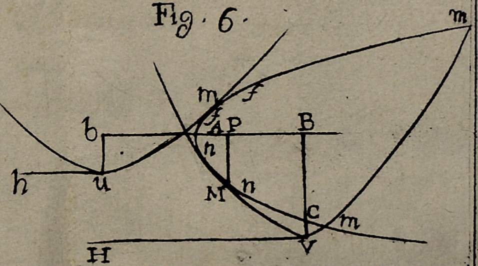

Fig. 7.

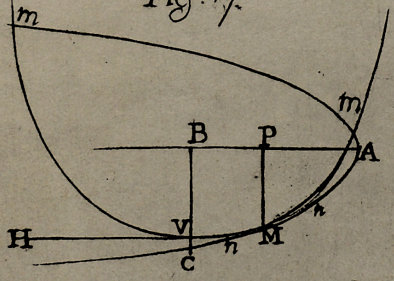
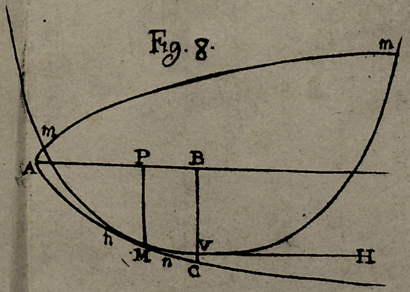
Fig. 8.